Quelques contributions dans des algèbres de fonctions généralisées, sur la problématique de la e-rumeur et celle du diabète

Séverine BERNARD

La synthèse de mes différents travaux de recherche se compose de deux parties. La première résume mes contributions dans le cadre des algèbres de fonctions généralisées et la deuxième porte sur des applications de la théorie du contrôle optimal et des systèmes dynamiques à la problématique de la propagation de rumeur et à celle du diabète. Ces travaux ont été effectués au sein des laboratoires AOC (Analyse Optimisation Contrôle) puis LAMIA (Laboratoire de Mathématiques Informatique et Applications) de l'Université des Antilles.

Les travaux présentés dans la première partie portent sur la notion de composition et d'exponentiel d'opérateurs intégraux généralisés, la résolution de problèmes de Dirichlet dans des algèbres de Sobolev généralisées et de lois de conservation à coefficients analytiques, ainsi que sur une approche multi-échelles pour résoudre un problème de diffusion accoustique.
Le théorème bien connu d'impossiblité de multiplication des distributions entraine que la théorie des distributions de Schwartz ne puisse être appliquée pour certaines équations différentielles non linéaires. De ce fait, J. F. Colombeau a développé, dans les années 80, une théorie sur un ensemble de fonctions généralisées qui forme une algèbre différentielle et qui contient canoniquement l'espace vectoriel topologique des distributions. A la suite de cela, de nombreuses études ont suivi sur ce type d'algèbres, ainsi que sur leurs utilisations pour la résolution d'équations aux dérivées partielles par exemple. C'est dans ce contexte que j'ai effectué mes premiers travaux de recherche lors de ma thèse de doctorat et c'est dans la continuité de l'utilisation de cette théorie que s'inscrivent les résultats présentés dans la première partie.
Après avoir rappelé quelques éléments de la théorie des fonctions et nombres généralisés, on commence par définir la notion de composition et d'exponentiel d'opérateurs intégraux généralisés. En effet, on a étendu la théorie des opérateurs à noyau dans le cadre des distributions à celui des fonctions généralisées, en les remplaçant par des opérateurs à noyau intégraux. De plus, on a montré que ces opérateurs sont caractérisés par leur noyau. Contrairement au cas distributionnel classique, on a prouvé que de tels opérateurs peuvent être composés entre eux sans aucune restriction. Ceci nous a amené ensuite à considérer leur composition successive et la somme de séries de tels opérateurs, ce qui a été fait pour l'exponentiel d'une sous-classe de tels opérateurs.
Parallèlement à ces travaux, on s'est intéressé à la résolution de problème du type $-\Delta\Phi(u) + \Psi(u) = 0$, avec condition de Dirichlet non homogène sur le bord. Dans un premier temps, on a traité le cas particulier de $\Psi(u) = u$ puis généralisé. Pour présenter ces travaux, on introduit et utilise les algèbres de Sobolev généralisées, qui sont basées sur les espaces de Sobolev classiques et qui sont des cas particuliers des algèbres de fonc-

tions généralisées.
De plus, dans la continuité de mes travaux de thèse, on a travaillé, avec des collègues de l'Université de la Havane, sur les solutions de type onde de choc pour des lois de conservation à coefficients analytiques. Via l'algèbre des fonctions généralisées introduite par J. F. Colombeau, on a étudié le problème de Riemann généralisé associé à l'équation $u_t(x,t)+f(u(x,t))u_x(x,t)=0$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, où f est une fonction analytique. En utilisant des propriétés des fonctions généralisées de Heaviside et de Dirac, on a transformé cette équation en un système d'équations aux dérivées partielles. Ce dernier a ensuite été étudié du point de vue théorique et numérique dans des cas particuliers où $f(u)$ est une fonction polynomiale. Les solutions approchées ont été obtenues en tronquant la chaine de Hugoniot-Maslov associée.

A la suite de cela, j'ai commencé à changer de thématique en travaillant sur des méthodes multi-échelles pour des problèmes de diffusion acoustique. Dans ce travail, on s'intéresse au problème elliptique indéfini suivant :

$$-u_{xx}-k^2u=f \text{ dans }]0,1[, u(0)=0, u_x(1)=\imath ku(1),$$

avec la notation $\imath=\sqrt{-1}$, $k=\frac{\omega L}{c}$ est le nombre d'onde qui est un nombre réel positif. Pour le problème d'Helmholtz, malgré le fait que la forme bilinéaire associée ne soit pas coercive, on peut exhiber un sous-espace W, de l'espace d'énergie, de co-dimension finie (qui est de l'ordre de k^4), et tel que la forme bilinéaire restreinte à W soit coercive. On développe alors une stratégie qui consiste à emprisonner la mauvaise partie de la forme bilinéaire sur un espace d'éléments finis correspondant à une grille grossière de l'approximation de l'équation et à procéder ensuite à une analyse multi-échelles sur les grilles fines.

Les travaux présentés dans la deuxième partie portent essentiellement sur les deux problématiques auxquelles je me suis intéressée ces dernières années, à savoir la propagation de rumeur et la maladie du diabète. Pour ce faire, on utilise les théories du contrôle optimal sur les équations différentielles ordinaires, des systèmes dynamiques et celle alliant les deux.

La rumeur est un phénomène très ancien qui se diffuse d'abord de bouche à oreilles, puis par les journaux, la radio et la télévision. De nos jours et ce depuis quelques années, avec le développement de nouvelles technologies et les nouveaux outils de communication que sont les réseaux sociaux, une nouvelle forme de rumeur est née, la e-rumeur. Mais ce phénomène de diffusion d'informations, bonnes ou mauvaises, peut avoir de lourdes conséquences sur nos sociétés, tant du point de vue économique que psychologique. Il est donc important de pouvoir comprendre comment se diffuse une information, quels sont les facteurs déterminants dans le processus de diffusion et quelles sont les stratégies à mettre en place pour pouvoir éviter, diminuer ou stopper ce type de phénomène. C'est dans cette optique que l'on a effectué des travaux sur cette problématique. En premier lieu, on travaille sur un modèle de propagation de rumeur existant dans la littérature, que l'on modifie pour le rendre plus réaliste et on optimise certains paramètres afin de réduire la densité des propageurs. A partir de ce même modèle, on agit ensuite de façon optimale, en introduisant un démenti au sein du réseau et / ou en isolant les noeuds les plus actifs du réseau, afin de stopper la diffusion d'une fausse information circulant sur ce réseau. Et enfin, on propose un modèle de diffusion d'information tenant compte du changement possible de situation, au cours du temps, de chaque individu du réseau, puisqu'un individu qui reçoit une information peut la transmettre tout de suite, ou réfléchir, et à un moment donné, décider de la diffuser ou pas. Une fois construit, on analyse la stabilité de ce modèle afin de mettre en évidence le non comportement cyclique et les conditions de persistence des différents groupes d'une telle population.

Le diabète est une maladie chronique dûe à des facteurs héréditaires et à une mauvaise hygiène de vie, comme des antécédents familiaux, le surpoids, une mauvaise alimentation, de l'inactivité physique... Cette maladie intervient quand le pancréas ne produit pas (type 1) ou plus (type 2) d'insuline ou quand le corps n'utilise pas de façon efficace l'insuline produite par le pancréas (type 2). Il en existe d'autres types, mais la plupart des diabétiques sont de type 1 ou 2. Par conséquent, le glucose provenant de l'alimentation reste dans le sang au lieu d'être transferré dans les cellules pour produire de l'énergie. Mais un taux élevé de glucose dans le sang provoque de nombreux dégâts aux différents organes et tissus tels que des amputations, des maladies cardio-vasculaires, des problèmes oculaires et bien d'autres... Le traitement est basé sur la prise de médicaments, l'injection d'insuline, un régime strict et des activités physiques. Selon la Fédération Internationale du Diabète, environ 425 millions d'adultes souffrent de cette maladie en 2017 dans le monde, ce qui engendre 4 millions de décès et d'énormes dépenses de santé. De plus, 352 millions de personnes risquent encore de développer du diabète. En particulier, il concerne plus de 3.5 millions de personnes en France en 2016 et plus de 9% de la population en Guadeloupe, selon la Fédération Française des Diabétiques. Sa progression est donc fulgurante, tant dans les pays développés que ceux en voie de développement. Vu la mortalité et les dépenses de santé dûes à cette maladie, il est important de comprendre ses facteurs déclenchants, ainsi que son évolution. Pour nos travaux, on est parti de modèles existants dans la littérature que l'on a modifiés pour pouvoir appliquer une stratégie de contrôle optimal. On travaille d'abord sur un modèle de régulation du glucose et on montre que le contrôle du glucose apporté par l'alimentation permet de diminuer la glycémie dans le sang, et ce du point de vue théorique et numérique. Ensuite, on étudie un modèle examinant les complications ou pas d'une population de diabétiques de type 2. En contrôlant la probabilité de développer des complications en informant les patients diabétiques sur la nécessité d'un mode de vie sain comprenant une alimentation saine et de l'activité physique régulière ou en contrôlant le taux avec lequel les complications sont guéries ou le taux pour lequel les patients avec complications sont gravement malades, en augmentant par exemple les dépenses de santé publique, on montre qu'il n'y a pas de va et vient entre le groupe des diabétiques avec complications et celui des diabétiques sans complications. Et enfin, en travaillant sur un modèle avec des équations différentielles avec retard, reflétant l'effet retardé de certaines actions sur la glycémie ou l'insuline d'un diabétique, on arrive à mettre en évidence la (ou les) action(s) optimale(s) afin de minimiser la glycémie.

Et en dernier lieu, on présente une extension de la méthode de type Newton pour les inclusions variationnelles dans le cas des fonctions semi-régulières à valeurs dans un cône. Pour ce faire, on rappelle d'abord quelques éléments sur ce type de fonctions, les processus convexes normés et les suites majorantes pour décrire ensuite l'algorithme et l'analyse de sa convergence, que l'on illustre finalement par des simulations numériques. Ce travail s'inscrit dans une perspective d'appplications à la résolution numérique de certains problèmes de contrôle optimal et n'en est pour l'instant qu'à ses débuts.