Résumé de l'habilitation à diriger des recherches

Silvere Paul NUIRO [*,†]
Maitre de conférences hors classe, Mathématiques (26)
Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications EA4540,
Université des Antilles

Contributions en analyse mathématique appliquée

Mes travaux de recherche sont résumés selon le plan suivant. Les sections 1 et 2 regroupent les résultats concernant les équations aux dérivées partielles non linéaires ; l'une traitant spécifiquement des équations de type Schrödinger et l'autre relative aux EDP non linéaires dégénérées à données très irrégulières. La section 3 est consacrée aux systèmes différentielles déterministes appliquées à des problèmes d'intérêt local. La section 4 concerne les méthodes semi-locales appliquée à la résolution d'inclusions variationnelles,.

1 Comportement global des solutions d'un système couplé NLSE

Le sysème étudié est un système couplé de deux équations non linéaires de Schrödinger (NLSE) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \imath u_t &=& -\Delta u + \kappa v + \imath\gamma u - (g_{11}|u|^2 + g_{12}|v|^2)u, \\ \imath v_t &=& -\Delta v + \kappa u - \imath\gamma v - (g_{12}|u|^2 + g_{22}|v|^2)v, \end{array} \right. \tag{1}$$

où le terme $\imath$ est le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$, le couple (u, v) est formé de fonctions à valeurs complexes, et l'une des équations inclut un gain et l'autre une perte dans la propagation des ondes caractérisée par les coefficients positifs κ et γ, généralement constants. Le couplage non linéaire cubique de type Kerr est caractérisé par les coefficients réels g_{11}, g_{12} et g_{22}. Ce modèle est utilisé pour sa pertinence dans différentes applications d'optique non linéaire (par exemple la fibre optique) . Il est intéressant de noter que la solution de ce système (1), possède la propriété, usuellement appelée $(\mathcal{P}T)$ symétrie dès lors que $g_{11} = g_{22}$. Cette propriété semble jouer un rôle fondamental dans des phénomènes très étudiés comme le comportement asymptotique exponentiel des solitons, l'approximation de Thomas-Fermi pour l'état fondamental de l'équation de Gross-Pitaevski ou l'explosion en temps fini des systèmes couplées d'équations de Schrödinger . La première publication [8], a permis de répondre à une conjecture ouverte énoncée par D. Pelinovsky & al. pour la dimension $n = 1$. Dans leur article, les auteurs ont prouvé que la densité $Q(t) = \|u(t)\|^2_{L^2} + \|v(t)\|^2_{L^2}$ n'explose pas en temps fini et que la croissance est infra-exponentielle avec le temps. Ils ont aussi énoncé une conjecture, basée sur l'observation des simulations numériques, qui montraient que l'énergie totale, associée à la solution, restait bornée au cours de l'évolution du phénomène, dans le cas étudié par Manakov, où $g_{11} = g_{12} = g_{22}$, avec la condition supplémentaire $\gamma < \kappa$. Dans cette situation, nous avons prouvé que l'énergie $D(T) = \int_0^T \left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla v(t)\|^2_{L^2} \right) dt$, pour $T > 0$, n'explose pas en temps fini, et établit aussi un contrôle infra-exponentiel de D par rapport au temps. Nous avons aussi construit un code, basé sur un schéma de Cranck-Nicholson pour la discrétisation du temps et une approximation de Galerkin par la méthode des éléments finis conforme couplée avec une méthode itérative de point fixe pour la discrétisation en espace, afin de verifier numériquement nos résultats théoriques. La construction d'un code a aussi été motivée par la possibilité de pouvoir conjecturer d'autres propriétés afin de pouvoir chercher à les démontrer théoriquement par la suite. La seconde publication [9], a permis de compléter le travail de V. Konotop & al. Dans leur article, les auteurs ont prouvé, lorsque la dimension d'espace est supérieure ou égale à 3, que l'énergie du système de Manakov (1) explose en temps fini, dans certaines situations. Notre contribution porte sur l'étude du cas critique ($n = 2$), pour lequel nous avons démontré que la solution explose en temps fini sous certaines conditions suffisantes.

[*]UFR des Sciences Exactes et Naturelles, Campus de Fouillole, BP 592, 97159 Pointe-à-pitre cedex
[†]e-mail: paul.nuiro@univ-antilles.fr, web: lamia.univ-ag.fr/membres/paul-nuiro, researchgate.net/profile/Silvere_Nuiro

La méthode, basée sur les techniques introduites par Glassey, est utilisée pour une situation non résolue par Konotop & al.. A l'instar de Konotop & al., via la méthode du viriel (moyenne quadratique), nous obtenons des conditions suffisantes sur les données initiales $(u_0, v_0) \in \left(H^1(\mathbb{R}^2)\right)^2$, à savoir une énergie initiale suffisamment négative. Ces dernières conditions assurant l'existence d'un intervalle de temps borné $[0, T_0]$ non vide sur lequel la solution n'existe pas alors qu'elle existe au voisinage de 0. A cette fin, nous avons supposé que les coefficients des termes non linéaires sont telles que la forme quadratique $\phi(r,s) = g_{11}r^4 + 2g_{12}r^2s^2 + g_{22}s^4$ est définie négative, ce qui est vrai lorsque $g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$, avec $g_{12} \leq \sqrt{g_{11}g_{22}}$. Nous avons ainsi démontré que la norme H^1 et par conséquent la norme L^∞ aussi, de la solution tendent vers l'infini au bout d'un temps fini. Pour la troisième publication, en cours de rédaction [6], l'objectif est l'étude numérique et qualitative du comportement durant l'évolution de la solution du système (1) en dimension critique $n = 2$. Le domaine spatial a été réduit au carré $]-L, L[\times]-L, L[$, couplé avec des conditions au bord de type Dirichlet homogène, en supposant $L > 0$ assez grand pour qu'elles n'interfèrent pas sur la solution, puisque nos données initiales sont de type gaussiennes centrées à l'origine. D'abord, la discrétisation a été faite en utilisant la méthode des différences finies centrées en espace et le schéma de Cranck-Nicholson pour le temps. Ensuite, deux algorithmes ont été programmés, dans une interface Python-Fortran, pour le traitement de la non linéarité : l'un basé sur une récurrence simple et l'autre sur la méthode de Newton. Pour ces deux implémentations, nous avons procédé à une analyse des erreurs spatiales et temporelles des schémas, et à une analyse comparative de leurs performances. Nous avons alors pu effectuer des expériences numériques pour observer les comportements qualitatifs de la solution du modèle, et l'approximation de la valeur du temps d'explosion en fonction des différents paramètres.

2 Résolution d'EDPs non linéaires à données très irrégulières

Dans cette section, le thème développé, concerne une méthode de résolution d'équations non linéaires dégénérées aux dérivées partielles de type elliptique, hyperbolique ou parabolique, pour lesquelles les données sont très irrégulières, à savoir moins régulières que des distributions. Pour ces problèmes, les difficultés recensées sont de plusieurs types : la définition des termes non linéaires dès lors que les solutions ne sont pas régulières, le cadre fonctionnel dans lequel évolue ces données très irrégulières, et donc la solution du problème, la dégénérescence de l'opérateur, et donc le changement de type de l'EDP, la démonstration de l'existence et l'unicité de solutions à ces problèmes et l'étude qualitative des solutions obtenues. Cette méthode de résolution est basée sur la technique de construction des algèbres de fonctions généralisées, introduite en 1992 par Jean-François Colombeau , et sur le théorème d'extension des applications introduit par Antoine Delcroix et Dimitri Scarpalezos en 2000. On notera que le point fort de cette construction a été la levée de l'impossibilité de la multiplication entre les distributions quelconques démontrée par Laurent Schwartz . Une analyse fine du procédé général de construction d'algèbres de fonctions généralisées a permis d'en dégager les principes fondamentaux afin de poser et de résoudre un problème hyperbolique à données irrégulières : le problème de Goursat. D'un point de vue qualitatif, nous avons pu y démontrer que, même lorsque les données sont des distributions de type masse de Dirac, la solution n'est pas une distribution mais une fonction généralisée "propre" ([11], [12]). Le développement de ces idées a permis aussi de résoudre des problèmes elliptiques de Dirichlet et de Neumann non linéaires à données très irrégulières [10]. . Dans l'optique de s'affranchir de la nécessité des estimations de type C^∞, et de rapprocher ces objets mathématiques des espaces usuellement utilisés (les espaces de Sobolev) pour l'étude du caractère bien posé des problèmes d'EDP usuels, nous avons introduit la famille des algèbres, dit de Sobolev ([2], [3]), de fonctions généralisées. Ces dernières ont été utilisées pour la résolution de problèmes de type Dirichlet doublement nonlinéaires dégénérés à données très irrégulières, pour lesquelles s'ajoute aux autres problématiques précédentes, celle de la prise en compte des conditions au bord de l'ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$. De plus, nous avons introduit une notion de spectre singulier paramétrique global, qui nous a permis de réaliser une étude qualitative du rapport entre le spectre singulier paramétrique de la solution avec celui des données. Nous avons aussi pu introduire différentes relations d'association, qui ont permis, en particulier, de définir une notion de solution faible généralisée. Le problème de la démonstration de l'unicité qui était resté ouvert dans [3] est désormais résolu. Dans ce travail, nous avons abordé la question de l'approximation numérique de la solution généralisée ainsi que celle de la représentation graphique pertinente de la solution généralisée. En outre, un article, portant sur le cas d'un problème non linéaire d'EDP de type elliptique dégénéré avec des conditions au bord de type Fourier-Robin dégénérée, est en cours d'expertise. Le caractère bien posé du problème étudié est démontré ; différentes notions de solutions et celles dites variationnelles généralisées sont introduites, puis comparées entre elles. De plus, pour boucler ce thème, l'étude des problèmes de type parabolique avec les différentes variantes usuelles de conditions aux limites est en cours.

3 Stabilisation d'une chaine de pendules couplées sous une force $\mathcal{PT}$ symétrique

Nous avons étudié une chaine de paire de pendules couplées par des ressorts de tension, chaque paire étant suspendue à une barre commune transverse. Chaque pendule interagit avec son voisin le plus proche dans les directions longitudinale et transverse. Ces systèmes peuvent être utilisés pour la modélisation de problèmes physiques allant de la dynamique de l'ADN à la structure cristalline des états solides. Ces systèmes sont régis par les équations de Newton suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x}_n + \sin(x_n) &= C(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + D(x_n - y_n) \\ \ddot{y}_n + \sin(y_n) &= C(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - D(x_n - y_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

où $(x_n(t), y_n(t))$ correspond aux angles entre chaque paire de pendules alors que les coefficients C et D caractérisent les couplages entre les pendules les plus proches dans les directions longitudinales et transversales, respectivement. Récemment, les investigations sur ces chaines ont montré qu'on pouvait réduire leur étude à celle des équations non linéaires de Schrödinger discrètes (dNLS) respectant le concept de $\mathcal{PT}$ symétrie introduit précédemment, sous certaines conditions de petitesse des coefficients de couplage ainsi qu'une hypothèse de résonance sur la force appliquée aux barres communes reliant les paires de pendules. Pour le problème de Cauchy du système dNLS [7],, dans le cas où la solution nulle est linéairement stable, on démontre que les solutions sont uniformément bornés en temps dans l'espace ℓ^2. De plus, pour un choix arbitraires de paramètres, et lorsque la taille du réseau de pendules est tronquée (N sites), on démontre une estimation de la norme ℓ^2 des solutions qui croît avec N. Afin observer numériquement le comportement instable de la chaine de pendules couplées dans le complémentaire de la zone de stabilité, nous avons programmé un solveur basé sur un schéma de Cranck-Nicholson pour un système auxiliaire découplé auquel nous avons adjoint une simple et classique stratégie de point fixe itéré pour obtenir le couplage. Nous avons constaté que le pendule du centre excite le plus proche voisin, et que ce processus se propage jusqu'à atteindre un équilibre dynamique où chaque pendule de la chaine oscille avec une amplitude finie. Alors que la norme ℓ^∞ des amplitudes d'oscillation reste finie à l'équilibre dynamique, celle ℓ^2 diverge lorsque t tend vers $+\infty$.

4 Contrôle optimal sur les pathologies médicales

Le diabète est une maladie, très présente dans notre environnement local ainsi qu'à l'échelle de la planète, dont les complications impactent fortement le taux de mortalité. L'objectif est d'étudier les propriétés de modèles mathématiques décrivant l'évolution de cette dernière pandémie, à travers un système dynamique d'équations différentielles ordinaires déterministes. Le modèle non linéaire considéré ici est inspiré de celui utilisé par Boutayeb et al. Ce dernier, qui vise à étudier l'évolution des complications d'une population de diabétiques, est fondé sur la partition de celle-ci en deux sous-ensembles : l'un regroupant les individus avec des complications et l'autre étant le complémentaire du premier. Ces travaux ([5],[4]) ont permis de démontrer l'existence du contrôle optimal et du point d'équilibre, indépendamment des choix du paramètre controlé et de la fonction concave de performance. Ce résultat est d'autant plus encourageant puisqu'il permet d'affirmer la non existence de cycle limite entre les deux sous-catégories de diabétiques et sans contrainte de choix du paramètre controlé. Le principe du maximum de Pontryagin a permis de caractériser le contrôle. La caractérisation du point d'équilibre du système a été réalisée en adaptant le théorème de bifurcation de Hopf à la théorie du contrôle optimal. Utilisant MAPLE©, nous avons pu prouver que l'état d'équilibre est un point-selle, qui n'est pas toujours admissible comme le prouve certains exemples.

5 Méthodes semilocales pour la résolution d'inclusions variationnelles

Les inclusions variationnelles ont été introduites par Robinson, comme une modelisation abstraite de divers problèmes d'ingénierie, d'économie, etc... Ici, l'objectif étant de prouver qu'une méthode d'approximations successives, appliquée au cas des applications multivoques, admet une convergence superlinéaire, sans utiliser le concept très intéressant de régularité métrique, contrairement à de nombreux auteurs qui se sont inspirés des travaux de Dontchev. Pour le cas des inclusions variationnelles de la forme $0 \in K - f(x)$ où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction semi-smooth et K un cone convexe fermé non-vide de $\mathbb{R}^m$, nous avons prouvé l'existence d'une solution à l'aide d'une méthode de type Newton généralisée pour le cas des applications multivoques définies à partir d'une application semi-smooth. Pour cela, nous considérons la suite (x_k) définie par le choix adapté de la donnée x_0 et la relation de recurrence suivante

$$x_{k+1} \in \min \{\|x - x_k\| \mid f(x_k) + \Delta f(x_k)(x - x_k) \in K\},$$

où $\Delta f(x_k)$ désigne le gradient généralisée de Clarke de f au point x_k. Nous avons ainsi amélioré le résultat de Robinson publié en 1972. L'originalité de notre travail [1] réside dans le fait d'avoir utilisé une méthode semilocale dans le cadre des fonctions semi-smooth, pour laquelle nous avons pu démontrer une convergence superlinéaire.

Références

[1] S. Bernard, C. Cabuzel, S.P. Nuiro and A. Pietrus, *Extended semismooth Newton method for functions with values in a cone, Acta Applicande Mathematicae, (2018) 155, 85-98*

[2] S. Bernard and S. P. Nuiro, *On generalized Sobolev algebras and their applications,* Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol. 25, No 2, Juliusz Schauder Center Toruń, 2005, p.375-390.

[3] S. Bernard and S. P. Nuiro, *Some PDEs problems in generalized Sobolev algebras,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 388, 2012, p.647-658.

[4] S. Bernard, T. César, S. P. Nuiro and A. Piétrus, *Unexistaence of limit cycle in an optimal control problem of a population of diabetics,* Revista de Matématica : Téoria y applicaciones 25(2) (2018), 239-259.

[5] S. Bernard, S. P. Nuiro and A. Piétrus, *Diabetes, complications and limit cycles,* Applied Mathematics E-Notes 15 (2015), 197-208.

[6] E. Destyl, J. Laminie, S.P. Nuiro and P. Poullet, *Numerical simulation of solution of coupled Parity-Time-symmetric nonlinear Schrödinger equations in critical case.* preprint, (2018).

[7] E. Destyl, S.P. Nuiro, D.E. Pelinovsky and P. Poullet, *Stabilization of the coupled pendula chain under parametric $\mathcal{PT}$-symmetric driving force,* Physics Letters A 381 (2017) 3884-3892

[8] E. Destyl, S.P. Nuiro and P. Poullet, *On the global behaviour of solutions of a coupled system of nonlinear Schrödinger equations.* Stud. Appl. Math., (2017).

[9] E. Destyl, S.P. Nuiro and P. Poullet, *Critical blowup in coupled Parity-Time-symmetric nonlinear Schrödinger equations.* AIMS Mathematics, 2(1) :195-206, (2017).

[10] J.-A. Marti and S.P. Nuiro, *Analyse algébrique d'un problème de Dirichlet non linéaire et singulier,* Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol. 13, No. 2, 1999, p.301-311.

[11] J.-A. Marti , S.P. Nuiro and V.S. Valmorin, *A non linear Goursat problem with irregular data,* Integral Transforms and Special Functions, Vol. 6, No.1-4, 1998, pp.229-246.

[12] J.-A. Marti, S. P. Nuiro and V. S. Valmorin, *Algèbres différentielles et problème de Goursat non linéaire à données irrégulières.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol.VII, No.1, pp. 135-159, 1998.